# 组合数学基础

|  |
| --- |
| 1. **排列组合的基本计数问题（研、本）** 2. **计算多项式系数（研、本）** 3. **排列组合算法（研）** |

## 绪 论

#### 背景

**起源：数学游戏**

**幻方问题：给定自然数1, 2, …, *n*2，将其排列成*n*阶方阵，要求每行、每列和每条对角线上*n*个数字之和都相等。这样的*n*阶方阵称为n阶幻方。每一行（或列、或对角线）之和称为幻方的和。**

**例：3阶幻方，幻和＝(1＋2＋3＋…＋9)/3＝15。**

##### 存在性问题：即n阶幻方是否存在？

##### 计数问题：如果存在，对某个确定的n，这样的幻方有多少种？

##### 构造问题：即枚举问题，亦即如何构造n阶幻方。

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **8** | **1** | **6** |  |  | **2** | **7** | **6** |
| **3** | **5** | **7** |  |  | **9** | **5** | **1** |
| **4** | **9** | **2** |  |  | **4** | **3** | **8** |

1. **3阶幻方**

**奇数阶幻方的生成方法：**

**一坐上行正中央，依次斜填切莫忘，**

**上边出格往下填，右边出格往左填，**

**右上有数往下填，右上出格往下填。**

**例：将2，4，6，8，10，12，14，16，18填入下列幻方：**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

1. **（拉丁方）36名军官问题：有1，2，3，4，5，6共六个团队，从每个团队中分别选出具有A、B、C、D、E、F六种军衔的军官各一名，共36名军官。问能否把这些军官排成6×6的方阵，使每行及每列的6名军官均来自不同的团队且具有不同军衔？**

**本问题的答案是否定的。**

**反例：**

**A1 B2 C3 D4 E5 F6 A1 B2 C3 D4 E5 F6**

**B2 C3 D4 E5 F6 A1 B3 C4 D5 E6 F1 A2**

**C3 D4 E5 F6 A1 B2 C5 D6 E1 F2 A3 B4**

**D4 E5 F6 A1 B2 C3 D2 E3 F4 A5 B6 C1**

**E5 F6 A1 B2 C3 D4 E4 F5 A6 B1 C2 D3**

**F6 A1 B2 C3 D4 E5 F6**

1. **（计数——图形染色）用3种颜色红（r）、黄（y）、蓝（b）涂染平面正方形的四个顶点，若某种染色方案在正方形旋转某个角度后，与另一个方案重合，则认为这两个方案是相同的。例如，对图1.1.2的涂染方案(a)，当正方形逆时针旋转时就变为方案(b)，因此，在正方形可旋转的前提下，这两种方案实质上是一种方案。那么，我们要问：不同的染色方案共有多少种？**

|  |  |
| --- | --- |
| **r** | **y** |
| **b** | **b** |

|  |  |
| --- | --- |
| **y** | **b** |
| **r** | **b** |

**（a） （b）**

1. **正方形的顶点染色**

**染色方案的总数为：＝81种。**

**问题：计算不同的染色方案，但在图像可旋转条件下重合的方案只能统计一次，不同的染色方案总数为（见第6章）**

***L*＝＝24**

1. **（存在性）不同身高的26个人随意排成一行，那么，总能从中挑出6个人，让其出列后，他们的身高必然是由低到高或由高到低排列的（见第5章）。**

#### 研究内容

**算法分类：**

* **第一类：数值算法。主要解决数值计算问题，如方程求根、解方程组、求积分等，其数学基础是高等数学与线性代数。**
* **第二类：组合算法，解决搜索、排序、组合优化等问题，其数学基础就是组合数学。**

**按所研究问题的类型，组合数学所研究的内容可划分为：**

* **组合计数理论**
* **组合设计**
* **组合矩阵论**
* **组合优化**

**本课程重点：以组合计数理论为主，部分涉及其它内容。**

#### 研究方法

**分类：**

**第一类：从组合学基本概念、基本原理出发解题的所谓常规方法（利用容斥原理、二项式定理、Pólya 定理解计数问题；解递推关系的特征根方法、母函数方法；解存在性问题的抽屉原理等）。**

**第二类：通常与问题所涉及的组合学概念无关，而对多种问题均可使用。例如：**

1. **数学归纳法：前提是已知问题的结果。**
2. **迭代法**

**例. 如已知数列满足关系，求的解析表达式。**

**直接迭代即得：**

****

**＝＋1＝**

**＝＝**

****

**＝**

**＝**

1. **一一对应技术**

**原理：建立两类事物之间的一一对应关系，把一个较复杂的组合计数问题A转化成另一个容易计数的问题B，从而利用对B的计数运算达到对A的各种不同方案的计数。**

**思路：将未解决问题的模式转化为一种已经解决的问题模式。**

1. **殊途同归方法**

**原理：从不同角度讨论计数问题，以建立组合等式。**

**应用：组合恒等式的证明（也称组合意义法）。**

1. **数论方法**

**特别是利用整数的奇偶性、整除性等数论性质进行分析推理的方法。**

**组合数学用的较多的是方法（3）与（4）。**

1. **有100名选手参加羽毛球比赛，如果采用单循环淘汰制，问要产生冠军共需要进行多少场比赛？**

**（解） 常规思路：50＋25＋12＋6＋3＋2＋1＝99场**

**采用一一对应方法：每场比赛产生一个失败者，且每个失败者只能失败一次。反之，要淘汰一个选手，必须恰好经过一场比赛。**

**结论：失败者与比赛场次之间一一对应，故应该比赛99场。**

**一般情况：单循环淘汰制的比赛，若有n个选手参考比赛，则须经过n－1场比赛，方可产生冠军。**

**设某地的街道将城市分割成矩形方格，某人在其住处*A*（0，0）的向东7个街道、向北5个街道的大厦*B*（7，5）处工作（见图1.1.3），按照最短路径（即只能向东或向北走），他每次上班必须经过某12个街段，问共有多少种不同的上班路线？**

**（解） （1）将街道抽象为等长的，其东西方向的长为x，南北方向的长为y。从A（0，0）点出发，向东走一段为x，向北走一段为y。**

***B*(7,5)**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

***A*(0,0)**

1. **最短路径**

**（2）对应为（元素可重复的）排列问题：一条从A到B 的路线对应一个由7个x，5个y共12个元素构成的排列。**

**蓝色路径 <——> *ｘｙｙｘｘｙｙｘｘｘｘｙ***

**反之，给定一个排列，按照x、y的含义，必对应一条从A到B的行走路线。例如，排列**

***ｙｘｘｙｙｙｙｘｘｘｘｘ* <——> 红色路径**

**结论：从A（0，0）到B（7，5）的最短路径与7个x，5个y的排列一一对应。**

**（3）求解：再对应为（元素不重复的）排列问题**

***N*＝＝＝＝792**

**（4）一般情形：从（0，0）点到达（m，n）点的不同的最短路径数为**

**N＝**

## 两个基本法则

### 加法法则

#### 加法法则

* **常规描述：如果完成一件事情有两个方案，而第一个方案有*m*种方法，第二个方案有*n*种方法可以实现。只要选择任何方案中的某一种方法，就可以完成这件事情，并且这些方法两两互不相同。则完成这件事情共有*m*＋*n*种方法。**
* **集合描述：设有限集合*A*有*m*个元素，*B*有*n*个元素，且*A*与*B*不相交，则*A*与*B*的并共有*m*＋*n*个元素。**
* **概率角度描述：设事件*A*有*m*种产生方式，事件*B*有*n*种产生方式，则事件“*A*或*B*”有*m*＋*n*种产生方式。当然*A*与*B*各自所含的基本事件是互相不同的。**

#### 应用

1. **某班又男生18人，女生12人，从中选出一名代表参加会议，问共有多少种选法？**

**（解） 用集合*A*表示男生，*B*表示女生，则该班中的学生要么属于*A*，要么属于*B*。根据加法法则，全班共有18＋12＝30个学生，故有30种选法。**

1. **用一个小写英文字母或一个阿拉伯数字给一批机器编号，问总共可能编出多少种号码？**

**（解） 26＋10＝36个。**

**其中英文字母共有26个，数字0~9共10个**

乘法法则

#### 乘法法则

* **常规描述：如果完成一件事情需要两个步骤，而第一步有*m*种方法、第二步有*n*种方法去实现。则完成该件事情共有*m*·*n*种方法。**
* **集合描述：设有限集合*A*有*m*个元素，*B*有*n*个元素，且*A*与*B*不相交，，记为一有序对。所有有序对构成的集合称为*A*和*B*的积集（或笛卡儿乘积），记作。那么，共有个元素。**

**＝**

* **概率角度描述：设离散型随机变量*X*有*m*个取值，*Y*有*n*个取值，则离散型随机向量（*X*，*Y*）有种取值可能。**

#### 应用

1. **仍设某班有男生18人，女生12人，现要求从中分别选出男女生各一名代表全班参加比赛，问共有多少种选法？**

**（解）用集合*A*表示男生，*B*表示女生，那么，根据乘法法则，共有种选法。**

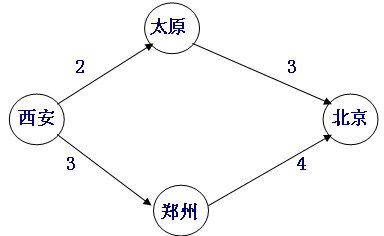
1. **给程序模块命名，需要用3个字符，其中首字符要求用字母*A*~*G*或*U*~*Z*，后两个要求用数字1~9，问最多可以给多少种程序命名？**

**（解） 首先，由加法法则，首字符共有种选法。其次，再由乘法法则，最多可以产生个不同的名称。**

1. **从*A*地到*B*地有条不同的道路，从*A*地到*C*地有条不同的道路，从*B*地到*D*地有条不同的道路，从C地到D地有条不同的道路，那么，从*A*地经*B*或*C*到达目的地*D*共有多少种不同的走法?**

**解 首先，由乘法法则，从*A*地经*B*到达*D*地共有×种走法, 由*A*经*C*到达*D*共有×种走法,再由加法法则知, 从*A*地经*B*或*C*到达*D*地共有＋种不同的走法。**

**例**

****

**2×3＋3×4＝18**

## 排列与组合

相异元素不允许重复的排列数和组合数

#### 计算公式

**从*n*个相异元素中不重复地取*r*个元素的排列数和组合数分别为：**

**排列：  (1.3.1)**

**组合：  (1.3.2)**

**例：n＝5，r＝3，即元素为1，2，3，4，5**

**排列：134，431，143，……， 254，425，……**

**组合：134，245，……**

**特点：排列考虑顺序，组合则不然。**

#### 数学模型

**（1）排列问题：将*r*个有区别的球放入*n*个不同的盒子，每盒不超过一个，则总的放法数为P(*n，r*)。**

**（2）组合问题：将*r*个无区别的球放入*n*个不同的盒子，每盒不超过一个，则总的放法数为C(*n*，*r*)。**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **对应关系** | **元素盒子** | | | | | **位置球** |
| **元素和位置编号** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **A B C** |
| **排列1** | **A** |  | **B** | **C** |  | **1 3 4** |
| **排列2** | **C** |  | **B** | **A** |  | **4 3 1** |
| **排列3** | **A** |  | **C** | **B** |  | **1 4 3** |
| **排列4** |  | **A** |  | **C** | **B** | **2 5 4** |
| **排列5** |  | **B** |  | **A** | **C** | **4 2 5** |
| **组合1** | **●** |  | **●** | **●** |  | **1 3 4** |
| **组合2** |  | **●** |  | **●** | **●** | **2 4 5** |

相异元素允许重复的排列

#### 问题

**从*n*个不同元素中允许重复地选*r*个元素的排列，简称*r*元重复排列。其排列的个数记为RP(∞，*r*)。**

#### 模型

**将*r*个不相同的球放入*n*个有区别的盒子，每个盒子中的球数不加限制而且同盒的球不分次序。**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **对应关系** | **元素盒子** | | | | | **位置球** |
| **元素和位置编号** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **A B C** |
| **排列1** | **AB** |  |  | **C** |  | **1 1 4** |
| **排列2** |  |  | **C B** | **A** |  | **4 3 3** |
| **排列3** |  |  | **A C** | **B** |  | **3 4 3** |
| **排列4** |  | **A B C** |  |  |  | **2 2 2** |
| **排列5** |  | **B** |  | **A** | **C** | **4 2 5** |

#### 计算公式

**RP(∞，*r*)＝ 。**

#### 集合描述方式

**设无穷集合，即S中共含有*n*类元素，每个元素有无穷多个，从*S*中取*r*个元素的排列数即为RP(∞，*r*)。**

**不重复排列：S＝＝。**

不尽相异元素的全排列

#### 问题

**有限重复的排列（或称部分排列）：设，即元素有个（i＝1,2,…,t），且，从*S*中任取*r*个元素，求其排列数RP(*n*，*r*)。**

#### 模型

**将r个有区别的球放入t个不同的盒子，而每个盒子的容量是有限的，其中第i个盒子最多只能放入****个球，求分配方案数。**

**例： S＝{2·1，4·2，1·3，3·4，2·5}**

**＝{1，1，2，2，2，2，3，4，4，4，5，5}**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **对应关系** | **元素盒子** | | | | | **位置球** |
| **元素和位置编号** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **A B C** |
| **排列1** | **AB** |  |  | **C** |  | **1 1 4** |
| **排列2** |  |  | **C B** | **A** |  | **4 3 3** |
| **排列3** |  |  | **A C** | **B** |  | **3 4 3** |
| **排列4** |  | **A B C** |  |  |  | **2 2 2** |
| **排列5** |  | **B** |  | **A** | **C** | **4 2 5** |

**说明：相对于前两种情况而言，此处讲的是有限重复的排列问题，即相异元素不重复的排列强调的是不重复，即盒子的容量为1；允许重复的排列实际上针对的是无限重复，即盒子的容量无限。二者都是极端的情况。而有限重复问题恰好介于两者之间，即盒子的容量有限。**

#### 特例

##### ＝1：RP(n,1)＝t

##### ＝n（全排列）

** (1.3.3)**

**即先视为n个不同元素的全排列，共有n!种。但每个排列实际重复统计了次。原因是当元素不同时，同类元素互相交换位置，对应不同的排列。而当同类元素相同时，针对每个确定的排列，同类元素互相交换位置，该排列不变。**

##### t＝2，

##### ＝1，即不重复的排列

##### ，即重复排列

相异元素不允许重复的圆排列

圆排列

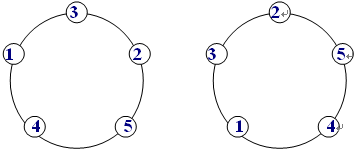
1. **把*n*个有标号的珠子排成一个圆圈，共有多少种不同的排法？**

**（解）典型的圆排列问题。**

**条件：对于围成圆圈的*n*个元素，同时按同一方向旋转，即每个元素都向左（或向右）转动一个位置，虽然元素的绝对位置发生了变化，但相对位置未变，即元素间的相邻关系未变，这样的圆排列认为是同一种，否则便是不同的圆排列。**

**解法一：先令*n*个相异元素任意排成一行（称为线排列），共有*n*!种排法，再将其首尾相接围成一圆，当圆转动一个角度时，对应另一个线排列，当每个元素又转回到原先的位置时，相当于*n*个不同的线排列，故圆排列数为**

**CP(*n*，*n*)＝＝(*n*－1)! (1.3.4)**

****

**32541 25413 54132 41325 13254**

**解法二：先取出某一元素*k*，放于圆上某确定位置，再令余下的*n*－1个元素作成一个线排列，首尾置于*k*的两侧构成一个圆排列同样可得到*CP*(*n*，*n*)＝(*n*－1)!。**

**3 2**

**1 2 3 5**

**4 5 1 4**

（a） （b）

1. **从*n*个相异元素中不重复地取*r*个围成圆排列，求不同的排列总数CP(*n*，*r*)。**

**（解）要完成这个圆排列，需先从*n*个元素中取*r*个，再将其组成圆排列，故**

**CP(*n*，*r*)＝  ＝ (1.3.5)**

项链排列

1. **将5个标有不同序号的珠子穿成一环，共有多少种不同的穿法？**

**（解）典型的项链排列问题。**

**首先，由例1.3.1知，5个相异元素的圆排列共有(5－1)!＝24种。其次，对于圆排列而言，将所穿的环翻过来，是另一种圆排列，但对于项链排列，这仍然是同一个排列（如图1.3.1所示），故不同的排法共有24/2＝12种。**

**一般情形，从*n*个相异珠子中取*r*个穿成一个项链，共有**

** ＝  (1.3.6)**

**种不同的穿法。**

**3 3**

**1 2 2 1**

**4 5 5 4**

（a） （b）

**图1.3.1 项链排列**

**允许重复的圆排列：情况复杂（参见反演公式相关内容）。**

相异元素允许重复的组合

问题

**设，从*S*中允许重复地取*r*个元素构成组合，称为r可重组合，其组合数记为RC(∞，*r*)。**

抽象

**将*S*的*n*个不同元素分别用数字1，2，…，*n*来表示。**

**例： n＝5，r＝4 1111，1122，1345，5555**

计算公式

**所取出的*r*个元素从小到大设为*a*1，*a*2，… *a*r，则*ai*满足：**

**1≤*a*1≤*a*2≤…≤*ar*≤*n***

**令 *bi*＝*a*i＋(*i*－1)，*i*＝1，2，…，*r***

**则 1≤*b*1＜*b* 2＜…＜*br*≤*n*＋(*r*－1)**

**结论：与从*n*＋*r*－1个相异元素中不允许重复地取*r*个元素的组合方案一一对应。从而**

** (1.3.7)**

**例： n＝5，r＝4**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **分类** | **重复组合** | **不重复组合** |
| **元素** | **1，2，3，4，5** | **1，2，3，，5，6，7，8** |
|  | **1111** | **1234** |
|  | **1122** | **1245** |
|  | **2245** | **2368** |
|  | **5555** | **5678** |

模型

**重复组合的模型是将*r*个无区别的球放入*n*个不同的盒子，每个盒子的球数不受限制。**

应用

1. **不同的5个字母通过通信线路被传送，每两个相邻字母之间至少插入3个空格，但要求空格的总数必须等于15，问共有多少种不同的传送方式？**

**（解）将问题分为三步求解：**

**（1）先排列5个字母，全排列数为 *P*(5，5)＝5!。**

**（2）两个字母间各插入3个空格，将12个空格均匀地放入4个间隔内，有1种方案。**

**（3）将余下的3个空格插入4个间隔：即将3个相同的球放入4个不同的盒子，盒子的容量不限。即从4个相异元素中可重复地取3个元素的组合数。**

** △△△ b △△△ d △△△ e △△△ a**

**方案1 △△ △**

**方案2 △△△**

**（4）总方案数 L＝5！·1·20＝2400**

不尽相异元素任取r个的组合问题

问题

**设集合，，从*S*中任取*r*个，求其组合数RC(*n*，*r*)。**

组合数

**设多项式**

**＝＝**

**则RC(n，*r*)就是多项式中的系数，即**

**RC(*n*，*r*)＝**

应用

1. **整数360有几个正约数？**

**（解）（1） 分解360为素因子的幂的乘积**

**360＝23×32×5**

**（2）正约数**

**1＝20×30×50，2＝2×30×50，3＝20×3×50，**

**5＝20×30×5，22＝22×30×50，6＝2×3×50＝3×2，**

**…**

**180＝22×32×5，360＝23×32×5**

**结论：正整数d是360的正约数****d＝****且0≤a≤3，0≤b≤2，0≤c≤1。**

**故7不是约数，16＝也不是约数。**

**（3）问题转化：即从集合的6个元素中任取0个、1个、……、6个的组合数之和。**

**（4）求解：构造多项式**

***P*6 (x)＝(1＋*x*＋*x*2＋*x*3)(1＋*x*＋*x*2)(1＋*x*)**

**＝1＋3*x*＋5*x*2＋6*x*3＋5*x*4＋3*x*5＋*x*6**

**求各项系数之和：**

**L＝＝1＋3＋5＋6＋5＋3＋1＝24**

**简单方法：多项式*P*6(*x*)的系数之和实质上就是求*P*6(1)。即**

***P*6(*x*)＝＝4×3×2＝24**

**（5）一般结论：设正整数*n*可以因子分解为**

***n*＝，**

**则n的正约数个数为**

**L＝**

#### 习题：18，21

## 组合等式及其组合意义

**组合等式的证明方法大致可归纳为以下三种：**

1. **归纳法**
2. **组合意义法：是指借助于阐明等号两端的不同表达式实质上是同一个组合问题的方案数（即殊途同归法），或者虽是两个不同组合问题的方案数，但二者的组合方案之间存在着一一对应关系，因此等式两端必须相等，从而达到证明等式成立的目的。对于恒等式的实质揭露得更为深刻。**
3. **母函数法：利用无穷级数（包括有限时的多项式）证明有关组合等式。是产生和证明组合恒等式的普遍方法。**
4. **对称关系式**

***C*(*n*，*r*)＝*C*(*n*，*n*－*r)* （1.4.1）**

**组合意义 从*n*个元素中取走*r* 个，必然余下*n*－*r*个，故从*n*取*r*的组合与从*n*取*n*－*r*的组合一一对应。**

1. **加法公式**

***C*(*n*，*r*)＝*C*(*n*－1，*r*)＋*C*(*n*－1，*r*－1) （1.4.2）**

**（一）组合意义：从*n*个元素中取*r* 个组合，就其中某个元素，不妨设为*a1*来看，全体组合可分为两类：**

1. **每次取出的*r* 个元素中都含有*a*1，这一类组合可视为从剩下的*n*－1个元素中任取*r*－1个元素，然后再加上*a*1而构成的组合，其组合数为*C*(*n*－1，*r*－1)。**
2. **不含元素*a*1，这类组合可视为从其余*n*－1个元素中任取*r*个元素的组合，其数目为*C*(*n*－1，*r*)。**

**两类情况互不重复，由加法法则，式（1.4.2）成立。**

**（二）例：从{1，2，3，4，5}中取3个的组合情况为：**

**第一类（包含元素“1”）： 123，124，125，134，135，145**

**第二类（不包含元素“1”）： 234，235，245，345**

**（三）路径问题：加法公式（1.4.2）的等价形式是**

***C*(*m*＋*n*，m)＝*C*（*m*＋*n*－1，*m*）＋*C*（*m*＋*n*－1，*m*－1） （1.4.3）**

**组合意义：从（0，0）点到（*m*，*n*）点的路径数等于从（0，0）点分别到（*m*，*n*－1）点和（*m*－1，*n*）点的路径数之和。**

***B*(m,n)**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

***A*(0,0)**

1. **乘法公式**

***C*(*n*，*k*) *C*(*k*，*r*)＝*C*(*n*，*r*) *C*(*n*－*r*，*k*－r) （1.4.4）**

**组合意义 考虑等式**

***C*(*n*，*n*－*k*) *C*(*k*，*k*－*r*) *C*(*r*，*r*)**

**＝*C*(*n*，*r*) *C*(*n*－*r*，*n*－*k*) *C*(*k*－*r*，*k*－*r*) （1.4.5）**

**左端：“将*n*个元素分为3堆，要求第一堆有*n*－*k*个元素，第二堆有*k*－*r*个，那么，第三堆就只有*r*个元素”的组合方案数。**

**右端：另一个类似的组合问题“将*n*个元素分为3堆，要求第三堆有*r*个元素，第二堆有*n*－k个，第一堆有*k*－*r*个元素”的组合方案数。**

**两个组合问题等价，故其方案数亦相等。**

1. ***C*(*n*＋*r*＋1，r)＝ **

**＝ *C*(*n*＋*r*，*r*)＋*C*(*n*＋*r*－1，*r*－1)＋*C*(*n*＋*r*－2，*r*－2)**

**＋*C*(*n*＋*r*－3，*r*－3)＋…＋*C*(*n*，0) （1.4.6）**

**或 *C*(*n*＋*r*＋1，*r*)＝**

**＝ *C*(*n*＋*r*，*n*)＋*C*(*n*＋*r*－1，*n*)＋*C*(*n*＋*r*－2，*n*)**

**＋…＋*C*(*n*，*n*) （1.4.7）**

**（一）组合意义：从*n*＋*r*＋1个元素中取r 个的组合情况，分类统计：**

1. **将所有组合针对*a*1分为两类：即所取*r*个元素中含元素*a*1或不含元素*a*1。对不含元素*a*1的情形，相当于从*n*＋*r*个元素中取*r* 个的组合，其组合数为；**
2. **仿照（1），再将含有元素*a*1的所有组合针对*a*2分为两类：即所取*r*个元素中含*a*2或不含*a*2，同样考虑不含*a*2的情形，这又相当于从除去*a*1、*a*2后的*n*＋*r*－1个元素中取*r*－1个，再加上*a*1而构成组合，其组合数为*C*(*n*＋*r*－1，*r*－1)；**
3. **同法，*r*－1组合中含元素*a*1、*a*2，但不含*a*3的组合数为*C*(*n*＋*r*－2，*r*－2)；**

****

** 组合中含元素*a*1、*a*2、…、*ar*－1，但不含*ar*的组合数为*C*(*n*＋1，1)；**

** 组合中含元素*a*1、*a*2、…、*ar*的组合数为*C*(*n*＋1，0)＝*C*(*n*，0) .**

**（二）说明：实际上，组合等式3是等式2的推广，等式2只是将*r*组合分为两类，而等式3则是分为*r*＋1类来考虑问题。**

**＝**

**＝**

**＝**

**＝……**

**＝**

**＝**

**（三）相应的路径问题：**

**（r,n＋1）**

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | **…** |  |  |  |  |
|  |  |  | **…** |  |  |  |  |
|  |  |  | **…** |  |  |  |  |
|  |  |  | **…** |  |  |  |  |
|  |  |  | **…** |  |  |  |  |

**（0,0）**

1. **Vandermonde（范德蒙）恒等式**

**＝**

**＝, *r*≤min(*m*，*n*)**

**（1.4.8）**

**组合意义 现有*n*个相异的红球，*m*个相异的蓝球，从*n*＋*m个*球中取*r*个的组合，其结果必是下列情形之一：有*i*个红球，*r*－*i*个蓝球（i＝0,1, …,*r*）。对固定的*i*，应有种选法。**

**特例 当*m*＝*r*时，有**

**＝  *r*≤*n***

**＝， （1.4.9）**

**＝**

1. **和式公式**

** （1.4.10）**

**组合意义 对*n*个元素而言，每一个元素都有“取”与“不取”两种可能，并由此构成所有状态。根据乘法法则，其总数为。它等于从*n*个元素中分别取0个，1个，……，*n*个元素的总组合数。**

**例**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **组合** |  |  |  |  |  |  |
| **φ** | **不取** | **不取** | **不取** | **不取** | **不取** | **不取** |
|  | **取** | **不取** | **取** | **不取** | **不取** | **取** |
|  | **取** | **取** | **取** | **取** | **取** | **取** |

1. ** （1.4.11）**

**组合意义 *n*个元素中取*r*个组合，*r*为奇数的组合数目等于*r*为偶数的组合数（包括*r*＝0）。**

**利用一一对应：从*n* 个元素中任意取定某一个元素*a*，所有*r*组合可以分为含有*a*和不含*a*两类。**

**设*r*为奇数（*r*≥1），若某个组合中含有元素*a*，则去掉*a*后就得一个*r*－1为偶数的组合，反之，设*r*为偶数（*r*≥0），同样可将相应的组合通过去掉*a*或加上*a*而对应唯一的一个奇数组合。**

**例如，n＝4**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***r*为奇数的组合** | **a** | **abc** | **abd** | **acd** | **b** | **c** | **d** | **bcd** |
| ***r*为偶数的组合** | **φ** | **bc** | **bd** | **cd** | **ab** | **ac** | **ad** | **abcd** |

1. ** （1.4.12）**

**组合意义 从*n*名先生、*n*名太太中选出*n*人，这*n*人中有一人担任主席，并且必须为太太，考虑有多少种选法。**

**选法1：先选一名太太任主席有种方法，再从其余的2n－1人中选*n*－1人有种方法。所以共有种选法。**

**选法2：对于k＝1,2,…,n，先从*n*名太太中选出*k*人，并从*k*人中选一人任主席，有种方法，然后再从*n*名先生中选n－k人，有种方法（即在n名先生中选k人不去充当“代表”）。选法总数＝。**

1. **设*r*，*M*都是自然数，*M*≥*r*则有**

****

** （1.4.13）**

**组合意义 设袋中有*M*个大小相同的球，其中有*r*个是白色，其余的是黑色。每次摸出一个球，不放回去，直至摸到白球为止。**

**这是一个必然事件（迟早会摸到白球），所以概率为1。**

**另一方面，第一次摸到白球的概率为。第一次未摸到白球，第二次摸到白球的概率为，第k次才摸到白球的概率为**

**， **

**因此，摸到白球的概率为式（1.4.13）左端，从而式（1.4.13）成立。**

1. **当*n*≥*m*时，**

** （1.4.14）**

**组合意义 考虑从*n*人中选出*m*名正式代表及若干名列席代表的选法（列席代表人数不限，可以为0）。**

**一方面，先选定正式代表，有种方法，然后从人中选列席代表，有种方法。因此共有**

** （1.4.15）**

**种选法。**

**另一方面，可以先选出m＋k人(k＝0,1,…,n－m)，然后再从中选出*m*名正式代表，其余的*k*人为列席代表，对每个*k*，这样的选法有种，从而，总选法的种数为**

** （1.4.16）**

**综合式（1.4.15）、（1.4.16）即得式（1.4.14）。**

## 多项式系数

Newton二项式

二项展开式

**当*n*是正整数时，Newton二项式定理**

** （1.5.1）**

**的右端称为二项式(*a*＋*b*)*n*的展开式，而组合数＝C(*n*，*r*)叫做二项式系数。**

组合意义

**将*n*个相异的球放入两个盒子，其中要求*a*盒放入*n*1＝*r*个，*b*盒放入*n*2＝*n*－*r*个，且同盒的球不分次序，则方案数为**

**＝**

**即项的系数为组合数。**

**例 ＝(a＋b)(a＋b)＝aa＋ab＋ba＋bb＝**

**＝(a＋b)(a＋b)(a＋b)＝(aa＋ab＋ba＋bb)(a＋b)**

**＝aaa＋aab＋aba＋abb＋baa＋bab＋bba＋bbb**

**＝**

**产生系数的根源：同一单项式中有顺序，即排列问题（球不同的分配问题）。**

一般分配问题

**问题：将*n*个相异的球放入*t*个盒子，要求第1个盒子放入*n*1个，第2个盒子放入*n*2个，……，第*t*个盒子放入*nt*个，且盒中的球无次序，求不同的分配方案数。**

**问题转化：由于第*i*个盒中的*ni*个球是无序的，可视为*ni*个相同的元素。因此，问题归结为求重集（*n*1＋ *n*2＋…＋ *nt* ＝ n）的全排列数RP(*n*，*n*)。由式(1.3.3)知**

****

**仿照二项式系数，将其记为。**

多项式系数

**一般多项式系数与的关系：**

**(*x*＋*y*＋*z*)3＝*x*3＋*y*3＋*z*3＋3*x*2*y*＋3*xy*2＋3*x*2*z*＋3*y*2*z*＋3*xz*2＋3*yz*2＋6*xyz***

**＝*x*3＋ *y*3＋ *z*3＋*x*2*y***

**＋*xy*2＋*x*2*z*＋*y*2*z*＋*xz*2**

**＋*yz*2＋*xyz***

**＝ *x*3＋ *y*3＋ *z*3**

**＋*x*2*y*＋*xy*2＋*x*2*z***

**＋*y*2*z*＋*xz*2＋*yz*2**

**＋*xyz***

1. **设n与t均为正整数，则有**



**＝ （1.5.2）**

**其中求和是在使的所有非负整数数列（*n*1，*n*2，…，*nt*）上进行。**

**证 (*x*1＋*x*2＋…＋ *xt*)*n***

**＝**

**其展开式的项都是由每个因子中各取某个x，然后相乘而得，即所有的项都具有形式**

****

**而且 。 一般项的系数等于在这*n*个因子中先选出*n*1个因子且这*n*1个因子中都取*x*1，然后再在其余的*n*－*n*1个因子中选出*n*2个因子且这*n*2个因子中都取*x*2，…，最后在剩下的*n*－*n*1－*n*2－…－*nt*－1＝ *nt*个因子中都取*xt*，那么，的系数为**

****

**＝**

**＝＝**

**称为多项式系数。**

多项式展开的项数

1. **展开式的项数等于，而这些项的系数之和为 .**

**证 展开式的项与从*t*个元素*x*1，*x*2，…，*xt*中取*n*个的*n*可重组合是一一对应的，由式(1.3.7)，后者正是RC(∞，*n*)＝*C*(*n*＋*t*－1，*n*)。**

**令*x*1＝*x*2＝…＝*xt*＝1，代入式（1.5.1）即得**

**＝(1＋1＋…＋1)*n*＝**

例

1. **求(*a*＋*b*＋*c*＋*d*)3的展开式。**

**解 *n*＝3，*t*＝4，共有RC(∞，3)＝*C*(3＋4－1，3) ＝20（项）**

**所以 (*a*＋*b*＋*c*＋*d*)3**

**＝＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋**

**＝＋＋＋＋3＋3＋3＋3＋3＋3＋3＋3＋3＋3＋3＋*3*＋6*abc＋6abd*＋6acd＋6bcd**

1. **(*a*1＋*a*2＋*a*3＋*a*4＋*a*5)7的展开式中，项的系数是**

**＝420**

1. **在(2*x*1*－*3*x*2＋5*x*3)6的展开式中，项的系数是什么？**

**解 令*a*1＝2*x*1，*a*2＝－3*x*2，*a*3＝5*x*3，则(*a*1＋*a*2＋*a*3)6的展开式中的系数为，即(2*x*1－3*x*2＋5*x*3)6中的系数。因此的系数是**

**＝＝－36000**

1. **求证**

**， n≥1 （1.5.3）**

**证 在二项式定理中取*a*＝－*x*，*b*＝1＋*x*，则**

**1＝＝**

**＝**

**整理即得式（1.5.3）。**

1. **今天是星期日，再过天是星期几？**

**解 ＝＝**

**＝**

**等价问题：除以7的余数＝除以7的余数**

**＝＝＝＝**

**≡4 mod 7**

**答案：再过天是星期四。**

**另法：＝**

**＝**

**＝＝**

**＝**

**＝－3≡4 mod 7**

1. **求证**

**＝0， n为自然数 （1.5.4）**

**证 0＝－**

**＝－**

**＝**

**－**

**＝**

**－**

**＝**

**＋**

**＝.**

#### 问题

**请给出多项式的展开式中和两项的系数。**

**答：22680，－189/2**

## 排列的生成算法

序数法

#### 数的位权表示

**（1）十进制数：考虑小于的正整数*n*，可以表示为下述的位权形式：**

**n＝， 0≤≤9＜10**

**例 315＝，（r＝3）**

**（2）推广（p进制数）**

**n＝， 0≤＜p**

**（3）特点：① 固定进制；② 逢p进一；③十进制r位数最小为0，最大为999…9＝－1＜；④将十进制换算为p进制数方法：除p取余法。**

变进制表示

**（1）依据：利用递推关系**

***n*! ＝(*n*－1)(*n*－1)!＋ (*n*－1)!**

**可以得到**

***n*!＝(*n*－1)(*n*－1)!＋ (*n*－2)(*n*－2)!＋ (*n*－2)!**

**＝(*n*－1)(*n*－1)!＋ (*n*－2)(*n*－2)!＋ (*n*－3)(*n*－3)!＋ (*n*－3)!**

****

**＝(*n*－1)(*n*－1)!＋ (*n*－2)(*n*－2)!＋ …＋2·2！＋1·1！＋1！**

***n*!＝＋1**

**所以 *n*!－1＝(*n*－1)(*n*－1)!＋ (*n*－2)(*n*－2)!＋ …＋2·2！＋1·1！**

**这和 －1＝9·＋9·＋…＋9·10 1＋9·10 0类似。可以证明，从0到*n*!－1的任何整数*m*都可唯一地表示为**

***m*＝*an*－1(n－1)!＋*an*－2(n－2)!＋…＋*a*22！＋a11！**

**＝ (1.6.1)**

**其中**

**0≤*ai*≤， ＝1，2，…，*n*－1. (1.6.2)**

**所以，从0到*n*!－1的*n*!个数与满足式(1.6.2)要求的序列**

**（*an*－1，*an*－2，*an*－3，…，*a*2，*a*1） (1.6.3)**

**是一一对应的。**

**将十进制转换为变进制：**

**20＝3\*3！＋1\*2！＋0\*1！＝（310）**

**30＝1\*4！＋1\*3！＋0\*2！＋0\*1！＝（1100）**

**100＝4\*4！＋0\*3！＋2\*2！＋0\*1！＝（4020）**

**200＝（13110），8005＝（143201）**

**（2）*ai*的计算**

***m*＝*an*－1(n－1)!＋*an*－2(n－2)!＋…＋*a*22！＋a11！**

**记 *n*1＝*m***

**＝＝*an*－1＋an－2＋…＋*a*3＋*a*2 (1.6.4)**

**即 m÷2!＝**

**同理， ＝＝*an*－1＋an－2＋…＋*a*4＋*a*3**

**即 (m－****)÷3!＝**

**算法：**

** (1.6.5)**

**其中表示不大于x的最大整数。**

**（3）特点：① 变进制；② 从右向左，第位逢＋1进一；③n位数最小为0，最大为：(*n*－1)(*n*－1)!＋ (*n*－2)(*n*－2)!＋ …＋2·2！＋1·1！＝*n*!－1＜*n*!；④ 将十进制换算为变进制数方法（见上）。**

序数法

**（1）规则**

**设*n* 个元素为1，2，…，*n*。**

**对应规则：设序列（*an*－1，*an*－2，*an*－3，…，*a*2，*a*1）对应某个排列（*p*）＝*p*1*p*2…*pn*，其中*ai*可以看作排列（*p*）中数*i*＋1所在位置后面比*i*＋1小的数的个数，即排列（*p*）中从数*i*＋1开始向右统计不大于*i*的数的个数。**

**（2）实例**

**1）*n*＝4，排列（*p*）＝（3124），4后面比它小的数的个数*a*3＝0，3后面比它小的数的个数*a*2＝2，2后面比它小的数的个数*a*1＝0，故得**

**（*p*）＝（3124）  （*a*3 *a*2 *a*1）＝（020）**

**2）反之，已知某个具体的（*a*3 *a*2 *a*1），即可得到对应的排列*p*1*p*2*p*3 *p*4 . 比如（*a*3 *a*2 *a*1）＝（111），由最左边的*a*3＝1可知，比4小的数只有一个，故4排在*p*3的位置（即*p*3＝4），再由中间的*a*2＝1知比3小的数也只有一个，因此3不能在最后，也不能在最前边，故*p*2＝3，最后，由*a*1＝1知2应排在1之前，故*p*1＝2，最后必有*p*4＝1。所以**

**（*a*3 *a*2 *a*1）＝（111）（*p*）＝（2341）**

**当*n*＝4时，各序列的对应排列见表1.6.1。**

**3）数 7 3 5 2 3 3 2 2 0  排列 3 5 A 8 6 4 9 7 1 2**

**数987654321  排列A 9 8 7 6 5 4 3 2 1**

**4）排列 3,5,7,9,10,8,6,4,2,1  数 5 5 4 4 3 3 2 2 1**

**（3）4元排列的生成**

**表1.6.1**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **m** | **a3 a2 a1** | **p1 p2 p3 p4** |  | **m** | **a3 a2 a1** | **p1 p2 p3 p4** |
| **0**  **1**  **2**  **3**  **4**  **5**  **6**  **7**  **8**  **9**  **10**  **11** | **000**  **001**  **010**  **011**  **020**  **021**  **100**  **101**  **110**  **111**  **120**  **121** | **1234**  **2134**  **1324**  **2314**  **3124**  **3214**  **1243**  **2143**  **1342**  **2341**  **3142**  **3241** |  | **12**  **13**  **14**  **15**  **16**  **17**  **18**  **19**  **20**  **21**  **22**  **23** | **200**  **201**  **210**  **211**  **220**  **221**  **300**  **301**  **310**  **311**  **320**  **321** | **1423**  **2413**  **1432**  **2431**  **3412**  **3421**  **4123**  **4213**  **4132**  **4231**  **4312**  **4321** |

字典序法

算法

**将所有*n*元排列按“字典顺序”排成队，以12…n为第一个排列，排序的规则，也就是由一个排列（*p*）＝（*p*1*p*2…*pn*）直接生成下一个排列的算法可归结为**

1. **求满足关系式的k的最大值，设为*i*，即**

****

1. **求满足关系式的*k*的最大值，设为j，即**

****

1. **与互换位置得**

**（*q*）＝（*q*1 *q*2 … *qn*）;**

1. **（*q*）＝（*q*1 *q*2 … *qi*－1 *qi qi*＋1 … *qn*）中*qi qi*＋1 … *qn*部分的顺序逆转，得新排列**

***q*1 q2 … *q*i－1 *q*n…*q*i＋1 *qi***

例

**（1）设*p*1*p*2*p*3*p*4＝3421，那么，*i*＝2，*j*＝2，*p*1与*p*2交换得 *q*1 *q2* *q*3 *q*4 ＝4321，再将321逆转即得下一个排列4123 。**

**当n＝4 时由字典序法所得的全部排列的先后顺序如下：**

**1234 → 1243 → 1324 → 1342 → 1423 → 1432 → 2134 → 2143 →2314 → 2341 → 2413 → 2431 → 3124 → 3142 → 3214 → 3241 →3412 → 3421 → 4123 → 4132 → 4213 → 4231 → 4312 → 4321**

**（2）85376421  *i*＝4，*j*＝6  *q*1 *q2* *q*3*…q*8 ＝85476321  85412367**

**85412367  *i*＝8，*j*＝8  *q*1 *q2* *q*3*…q*8 ＝85412376**

**85412376  *i*＝7，*j*＝8  *q*1 *q2* *q*3*…q*8 ＝85412673  85412637**

**85413726  *i*＝8，*j*＝8  *q*1 *q2* *q*3*…q*8 ＝85413762**

**85413762  *i*＝6，*j*＝7  *q*1 *q2* *q*3*…q*8 ＝85416732  85416723**

邻位互换生成算法

**本算法的思想也是希望以（12…*n*）作为n个元素1，2，…，*n*的第一个排列，然后按照某种方法，由一个排列（*p*）＝（*p*1*p*2…*pn*）直接生成下一个排列，直到全部排列生成完毕为止。**

**以*n*＝4为例，开始在排列1234的各数上方加一个左箭头“←”，当一个数上方箭头所指的一侧，相邻的数比该数小时，便称该数处于活动状态。例如中的2,3,4都处于活动状态。**

**从排列（*p*）＝（*p*1*p*2…*pn*）生成下一个排列的算法如下：**

**（1）若排列（*p*）＝（*p*1*p*2…*pn*）中无一数处于活动状态，则停止，否则转（2）；**

**（2）求所有处于活动状态的数中的最大者，设为*k*，*k*和它的箭头所指的一侧的相邻数互换位置，转（3）；**

**（3）令比*k*大的所有数的箭头改变方向，转（1）。**

***n*＝4时各个数移动位置而生成所有4排列的情形见图1.6.1。**

**各数的活动规律：以1234中的4为例，从一端移到另一端，共进行了3次换位，然后暂停一次，这时3开始活动。这是4活动的一个过程。**

**3在123中的活动规律也很相似，而且这种活动规律可以推广到*n*个数的排列。**



**图1.6.1 排列的邻位互换过程**

## 组合的生成算法

**例 从6个元素1,2,3,4,5,6中取3个的组合：**

**123 → 124 → 125 → 126 → 134 → 135 → 136 → 145 → 146 → 156 →234 → 235 → 236 → 245 → 246 → 256 → 345 → 346 → 356 → 456**

**规律：**

**（1）最后一位数最大可达*n*（本例n＝6），倒数第二位数最大可达*n*－1，…，依此类推，倒数第*k*位最大可达*n*－*k*＋1（*k*≤*r*），若*r*个元素的组合用*c*1*c*2…*cr*来表示，并不妨假定**

***c*1< *c*2<…< *cr***

**则**

***cr*≤*n*，*cr*－1≤*n*－1，…，*c*1≤*n*－*r*＋1**

**即ci≤n－r＋i，i＝1,2, …,r 。**

**（2）当存在*cj* <*n*－*r*＋*j*时，令*i*＝*max*，并令**

****

**就可得到新的组合*d*1*d*2…*dr* 。若每个*cj* ＝*n*－*r*＋*j*，则已经达到最后一个组合，生成完毕。**

**例如由123开始，显然1，2，3都满足 ，选其中最大下标对应的*c*3 ，令*d*1＝ *c*1＝1，*d*2＝ *c*2＝2，*d*3＝ *c*3＋1＝4，便得下一组合124。又如组合*c*1*c*2*c*3＝346，那么3和4满足，自然选，并令*d*1＝ *c*1＝3，*d*2＝ *c*2＋1＝4＋1＝5，*d*3＝ *d*2＋1＝5＋1＝6，即后续组合为356 。**

**归纳从一个组合*c*1*c*2…*cr*得到下一个组合的步骤如下初值为组合 ：**

**（1）若*i*＝*max*存在，转（2），否则，停止；**

**（2）*ci*←*ci*＋1;**

**（3）*cj*←*cj*－1＋1，*j*＝*i*＋1，i＋2，…，*r* . 输出，转（1）。**

**例：n＝10，r＝5**

**14678 → 14679 → 1467A → 14689 → 1468A → 1469A → 14789**

## 应用举例

1. **试确定由1，2，3，4，5这五个数字能组成多少个大于43500的五位数？**

**（解）有限制条件的RP(∞，5)的问题。下列情况之一发生便可导致“大于43500”：**

1. **万位上数字是5，其余四位上的数字从 1，2，3，4，5 中允许重复选取，共有1×5 4个符合要求的数；**
2. **万位上数字为4，千位上数字从4，5中选一个，其余三位上数字可从五个数字中重复选取，共有1×2×53个；**
3. **万位、千位、百位上数字分别为4、3、5，其余二位上的数字可在1～５间重复选取，共有1×1×1×52个。**

**由加法法则，这样的数总计为**

**54＋2×53＋52＝900 （个）**

1. **从－2，－1，0，1，2，3共6个数中不重复地选3个数作为二次函数的系数，使得抛物线的开口方向向下，共可作出多少个二次函数？**

**（解） 抛物线的开口方向向下，必有*a*<0。**

**第一步：*a*从－2、－1中选一个，有种方法；**

**第二步：在余下的五个数中选出两个进行排列，作为b和c，有种方法。**

**根据乘法法则，共可作出二次函数**

**＝40（个）**

1. **满足的正整数解有多少组？**

**解 方法Ⅰ：设想长度为100的线段被分为4段，每段的长度均为正整数，叫做，，，。把4条线段再接成一条线段，需要3个加号“＋”。如＝10，＝35，＝40，＝15，从而有10＋35＋40＋15＝100。**

**— — … — ＋ — — … — ＋— …— — —＋ — … —**

**问题转化：长度为1 的100条线段中间有99个空“○”将这些线段分开，在这99个空的位置上放置3个“＋”号，未放“＋”号的线段合成一条线段，求放法总数。**

**＝＝156849（组）**

**方法Ⅱ：将100个相同的“1”放入4个不同的盒子，每个盒子至少放一个。求不同的放法数。**

**第一步：每个盒子先放一个，共有一种放法。**

**第二步：将余下的96放入，有**

**变异一：求非负整数解（即）。**

**用方法Ⅰ求解：**

**— — … — — … — ＋ — — … — — ＋ — — … —＋**

**— — … — — … — ＋＋ — — … — — ＋ — — … —**

**答：＝176851**

**用方法Ⅱ求解：将100个相同的球放入4个不同的盒子，每个盒子的容量无限。求不同的放法数。**

**答：＝176851**

**变异二：求解。，**，，。

**思想：将问题转化为变异一。**

**原方程 **

**故令 ，**，，

**得  （）**

**答：解数为 ＝166650**

**问题：将原题用变异二的思路求解。**

****

1. **把r个相异物体放入n不同的盒子里,每个盒子允许放任意个物体,而且要考虑放入同一盒中的物体的次序,求这种分配方案有多少?**

**（解）**

**特点：本问题既不是相异元素的不重复排列,也不是简单的重复排列。**

**考虑第一个物体的放法有*n*种，把它放入某盒子后，可看作是该盒子的隔板，将盒子分成了两部分。这样，第二个物体的放法有*n­­*＋1种，同理，第三个物体的放法有*n*＋2种，……，第*r*个物体的放法有*n­­*＋*r*－1种。由乘法原理，符合条件的方案数为**

***n*(*n*＋1)(*n*＋2)…(*n*＋*r*－1)＝＝*P*(*n*＋*r*－1，*r*)**

**若在上例中把将条件“考虑放入同一盒中的物体的次序”改为“不考虑放入同一盒中相异物体的次序”，则分配方案数应为＝，即*n*个相异元素的*r*可重排列数。原因是每个物体都恰有*n*种放法。**

**实际应用：A、B、C、D、E共5位同学由两个门排队进入教室，每个门每次只能同时进一人，问有多少种进法？**

**答：2×3×4×5×6＝720种**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **前门人数** | **后门人数** | **方法** | **备注** |
| **0** | **5** | **1×5!＝120** | **×0!×5!** |
| **1** | **4** | **×1×4!＝120** | **×1!×4!** |
| **2** | **3** | **×2!×3!＝120** |  |
| **3** | **2** | **×3!×2!＝120** |  |
| **4** | **1** | **×4!×1!＝120** |  |
| **5** | **0** | **×5!×0!＝120** |  |

**问题1：设前门宽大，可以同时进2人，那么又有多少种不同的进法？**

**答：有 3×4×5×6×7＝2520种。**

**问题2：火车站外有100名乘客，欲从4个门排队进入候车室，问有多少种进门的排队方式？**

**问题3：大楼共有19层，今有12人从一楼进入电梯上楼，每层都可能有人出电梯，且电梯的门同时只能容许一个人出入，问有多少种方式出电梯？**

**如果只关心从每个门进入教室的学生人数和具体的人，但不考虑从同一个门进入教室的学生的次序，则5个学生通过2个门进入教室的所有不同方式也就是**

**＝32**

**种。**

1. **把元集*S*划分成个无序非空子集（*n*≥4），共有多少种分法？**

**解**

**模型：分配问题：将个不同的球放入n－3个相同的盒子，每个盒子最少一个球。**

**求解：设共有L种分法，可将这些划分方法分成如下三类：**

1. **使得有一个子集是4元集，其余子集是一元集的划分方案数等于*n*元集的不重复的4组合数；**
2. **使得有一个子集是3元集，有一个子集是2元集，其余子集是1元集的划分方法：因为*n*元集*S*的*5*组合数为，把5元集划分成一个3元子集和一个2元子集的方法有＝10种，故由乘法法则，属于此类的划分方法有10种；**
3. **使得有3个子集是2元集，其余子集是一元集的划分方法：因为*n*元集的6组合数为，把6元子集划分成3个2元子集的方法有**

****

**种，所以属于此类的划分方法有种。**

**三类情况，互不重复，故由加法法则得**

***L*＝**

1. **设是能够从集合中选出两两之差均大于*r*的*k*元子集的方案数，试求。**

**解 在集合*A*＝中任取*k*个两两之差超过*r*的数构成组合，不妨设，则≥*r*＋1 （1≤*i*＜*j*≤*k*），令**

**， **

**那么，≥1 （1≤*i*＜*j*≤*k*，且有**

**1≤≤*n*－(*k*－1)*r***

**即按条件从*A*中选取*k*个元素的一种方案对应于从集合*B*＝中不重复地选取*k*个元素的方案，反之亦然。因此，两个集合各自满足不同条件的k组合方案是一一对应的，后者的组合方案数为，从而知**

****

1. **有7位科学家从事一项机密工作，他们的工作室装有电子锁，每位科学家都有打开电子锁的“钥匙”。为了安全起见，必须同时有4人在场时才能打开大门。试问该电子锁至少应具备多少个特征？每位科学家的“钥匙”至少应有多少种特征？**

**（解） 任意3个人在一起，至少缺少一种特征，故不能打开电子锁。由7个人中的3个人组合数为*C*(7，3)，故电子锁至少应有**

***C*(7，3)＝＝35**

**种特征。这样才能保证有任意3人在场时至少缺少一个特征而打不开门。这就是说，每一种组合所形成的3人小组缺少的特征是不一样的，才能达到目的。如若不然，假设电子锁只有34种特征，那么，7人中取3位的35种组合方案中，至少有两组缺少同一种特征，而这两种组合方案至少对应4位不同的科学家（当然至多6人），这就说明，这4位科学家由于缺少同一特征而当4人同时在场时打不开大门。**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **1** | **ABC** | **8** | **ACF** | **15** | **AFG** | **22** | **BDG** | **29** | **CEF** |
| **2** | **ABD** | **9** | **ACG** | **16** | **BCD** | **23** | **BEF** | **30** | **CEG** |
| **3** | **ABE** | **10** | **ADE** | **17** | **BCE** | **24** | **BEG** | **31** | **CFG** |
| **4** | **ABF** | **11** | **ADF** | **18** | **BCF** | **25** | **BFG** | **32** | **DEF** |
| **5** | **ABG** | **12** | **ADG** | **19** | **BCG** | **26** | **CDE** | **33** | **DEG** |
| **6** | **ACD** | **13** | **AEF** | **20** | **BDE** | **27** | **CDF** | **34** | **DFG** |
| **7** | **ACE** | **14** | **AEG** | **21** | **BDF** | **28** | **CDG** | **35** | **EFG** |

**对某一位科学家A的“钥匙”而言，其“钥匙”的特征个数至少为**

**C(6，3)＝＝20**

**例：A＝{16～35}； B＝{6～15，26～35}；**

**C＝{2～5，10～15，20～25，32～35}；**

1. **从（0，0）点到达（*m*，*n*）点（*m*<*n*），要求中间所经过的每一个格子点（*a*，*b*）恒满足*b*>*a*，问有多少条最短路径？**

**解 从（0，0）到（*m*，*n*）点的路径中若排除经过点（*a*，*b*），*b*≤*a*，的可能性。则第一步必须从（0，0）到（0，1）。因此问题等价于求满足条件的从（0，1）点到（*m*，n）点的路径数。**

**（m,n）**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

**（0，0）**

1. **带有限制条件的最短路径问题**

**由于*m*<*n*，显然从（1，0）点到（*m*，*n*）点的每一条路径，必然穿过*y*＝*x*上的格子点。下面建立起从（1，0）到（*m*，*n*）点每一条路径，与从（0，1）到（*m*，*n*）点但经过*y*＝*x*线上的格子点的路径间的一一对应关系。**

**从图1.8.1可见，若从（1，0）到（*m*，*n*）点的某一路径与*y*＝*x*的交点从左而右依次为*P*1，*P*2，…，*Pk*，设*Pk*是最后一个在*y*＝*x*上的格子点。作（0，1）点到*Pk*的一条道路（实线）使之与上述的从（1，0）点到*Pk*点的路径（虚线）关于直线y＝x对称，于是对从（1，0）点到（*m*，*n*）点的一条路径，有一条从（0，1）点到（*m*，*n*）点，但过*y*＝*x*上的点的路径与之对应。反之对从（0，1）点到（*m*，*n*）点的一条路径（经过*y*＝*x*上的格子点），必存在从（1，0）点到（*m*，*n*）点的一条路径与之对应。**

**故所求的路径数为 (0，1)点到（*m*，*n*）点的所有路径数减去（1，0）点到（*m*，*n*）点的所有路径数，即**

***N*＝**

**＝(*m*＋*n*－1)!**

**＝(*m*＋*n*－1)!**

**＝ （*n*—*m*）＝ **

1. ***n*,*h*,*r*都是非负整数，并且**。证明**

** (1.8.1)**

**等号何时成立？**

**解 在中取k＋r个元，有种取法。其中特殊的一种取法是：先取前*k*个元素；再从其余的个元素中取*r*个，这样的取法有种。显然后者不大于前者，这就是式（1.8.1）。**

**等号成立时n＝k＋r，否则总有不全含的k＋r元子集。反过来，当n＝k＋r时，确实有**

****

1. **二进制串的汉明距离**

**设*a*、*b*两个用*n*位二进制表示的码**

***a*＝*a*1*a*2…*an*， *b*＝*b*1*b*2…*bn***

**如若*ai*≠*bi*的个数为*k*，则用*d*（*a*，*b*）＝*d*（*b*，*a*）＝*k*表之，称为*a*、*b*码的Hamming距离。**

1. **性质**

**三角不等式**

***d*（*a*，*b*）＋*d*（*b*，*c*）≥*d*（*a*，*c*）**

**设*c*＝*c*1*c*2…*cn*，*d*（*a*，*c*）＝k。如若*ai*≠*ci*，由于每位只有两种可能（0或1），因此有以下两种情况：**

1. ***ai*≠*bi*，但*bi*＝*ci*；**

**（2）*ai*＝*bi*，*b*i≠*ci*。由于假定*d*（*a*，*c*）＝k，其中*k*1位满足条件（1），*k*2位满足条件（2），且*k*＝*k*1＋*k*2 。**

**根据*Hamming*距离的定义有**

***d*（*a*，*b*）≥k1 ， *d*（*b*，*c*）≥*k*2**

**故三角不等式成立。**

1. **检错码与纠错码**

**检错码：奇偶校验码、汉明码、BCH码等。**

**纠错码：汉明码、BCH码、郭帕码等。**

1. **汉明码**
2. **思想：如若*a*′与码*a*的距离≤*r*，则认为*a*′是*a*的错误而予以纠正，即将*a*′当作是码*a*而加以处理。**
3. **码字的距离：任意两个码*a*、*b*之间的*Hamming*距离不得小于2*r*＋1,否则可以构造*c*,使之满足**

***d*(*a*,*c*)＝*r*,*d*(*c*,*b*)＝*r***

**即*c*与码*a*和*b*的距离相等，都等于*r*,无法纠正。因若*a*与*b*的距离为2*r*，即其中有2*r*位满足*ai*≠*b*i。从这2*r*位中选取*r*位，使之保持与*a*相同，另*r*位与*b*相同。这样所得的*c*便是所求。**

**反之，若有一组码，其中两两的*Hamming*距离不小于2*r*＋1。如若*a*′与*a*的距离≤*r*，则由*d*（*a*，*a*′）＋*d*（*a*′，*b*）≥*d*（*a*，*b*），可知*a*′与其它任一码字*b*的距离大于*r*，这是因为**

***d*（*a*′，*b*）≥*d*（*a*，*b*）－ *d*（*a*，*a*′）≥（2*r*＋1）－*r*＝*r*＋1>r**

1. **例：r＝1，n＝8**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **字母** | **码字** | **相近码** |
| **a** | **00000000** | **10000000，01000000，…，00000001** |
| **b** | **11100000** | **01100000，10100000，…，11100001** |
| **c** | **00011100** | **10011100，01011100，…，00011101** |
|  |  |  |

1. **编码量**

**设有一组*Hamming*距离不小于**的*n*位二进制码：**

***a*1，*a*2，…，*aM***

**已知*n*位二进数共有2n个，其中与*ai* 的距离等于*k*的数的个数显然为，即从*ai*中取出*k*位加以改变而得。故与*ai*的距离小于等于*r*的数的个数为**

****

**凡是与ai的距离小于等于r的二进制数都认为是由于ai的错误引起的。令Ui＝{a|d(a，ai)≤r}。**

**根据编码时对距离的规定，可知2n个数中每个数最多只能属于U1，U2，…UM中的一个。**

**所以**

**≤2n**

**即**

***M*≤**

# 重点与要求

1. **排列组合的基本计数问题（研、本）**
2. **计算多项式系数（研、本）**
3. **排列组合算法（研）**

# 习题1

* 1. **基本题：1～9，14，16，19，22～23，29，31**
  2. **加强题：11～12，17，18，21，28**
  3. **关联题：10，27，**
  4. **提高题：13，15，20，24～26，30，32**

###### 在1到9999之间，有多少个每位上数字全不相同而且由奇数构成的整数？

**（解）问题相当于求在相异元素中不重复地取1个、2个、…、4个元素的所有排列数，答案为**

**＝5＋20＋60＋120＝205**

###### 比5400小并具有下列性质的正整数有多少个？

**(1) 每位的数字全不同；**

**(2) 每位数字不同且不出现数字2与7。**

**（解）（1）分类统计：①一位正整数有个；②两位正整数有＝81个；③三位正整数有＝9×9×8＝648个；④千位数小于5的四位数有＝4×9×8×7＝2016个；⑤千位数等于5，百位数小于4的数有＝4×8×7＝224个。由乘法法则，满足条件的数的总个数为**

**9＋81＋648＋2016＋224＝2978**

**（2）仿（1），总个数为**

**＋＋＋＋**

**＝7＋49＋294＋630＋150＝1130**

###### 一教室有两排，每排8个坐位，今有14名学生，问按下列不同的方式入座，各有多少种坐法？

**(1) 规定某5人总坐在前排，某4人总在后排，但每人具体坐位不指定；**

**(2) 要求前排至少坐5人，后排至少坐4人。**

**（解）**

**（1）5人在前排就座，其坐法数为 ，4人在后排就座，其坐法数为 ，还空7个坐位，让剩下的个人入坐，就座方式为 种，由乘法法则，就座方式总数为**

**＝28 449 792 000**

**（2）因前排至少需坐6人，最多坐8人，后排也如此。可分成三种情况分别讨论：①.前排恰好坐6人，入坐方式有种；②. 前排恰好坐7人，入坐方式有种；③前排恰好坐8人，入坐方式有种。各类入坐方式互相不同，由加法法则，总的入坐方式总数为**

**＋＋**

**误：先选6人坐前排，再选4人坐后排，剩下的4人坐入余下的6个座位。故总的入坐方式共有**

****

**种。但这样计算无疑是有重复的，例如恰好选6人坐前排，其余8人全坐后排，那么上式中的就有重复。**

###### 一位学者要在一周内安排50个小时的工作时间，而且每天至少工作5小时，问共有多少种安排方案？

**（解）是重复组合问题。（1）每周按7天计算，先要拿出5×7＝35小时平均分配到每一天，再将其余的15小时安排到7天之中，每天的小时数不受限制，则安排方案数为**

****

**（2）若每周的工作日按6天计，则问题变成在平均分配完5×6＝30小时后，再将余下的20小时分配到这6天中，但此时每天最多只能分配19小时。或者更一般，每天在5小时外再最多工作小时，那么，答案是多项式**

**＝**

**中的系数，其中。**

**（3）另外，设每周工作t天，每天最少工作5小时，最多工作小时，可以不按照上边的两步分配方法求解，而是直接计算多项式**

**＝，**

**中的系数，即得答案。**

###### 若某两人拒绝相邻而坐，问12个人围圆桌就坐有多少种方式？

**答 11！－2×10！＝9×10！**

###### 有15名选手，其中5名只能打后卫，8名只能打前锋，2名能打前锋或后卫，今欲选出11人组成一支球队，而且需要7人打前锋，4人打后卫，试问有多少种选法？

**答 **

**＝40＋2×(140＋80)＋(280＋80＋2×280)＝1 400**

###### 求展开式中项前的系数。

**答 ＝＝10 080**

###### 求的展开式。

**（解）由多项式的展开式公式**

**＝**

**＝＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋**

**＝＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋**

**＝＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋＋**

**可以验证，系数之和**

**1×3＋4×6＋6×3＋12×3＝81＝**

###### 求展开式中的系数。

**答. ＝＝840**

###### 试证任一正整数n可唯一地表成如下形式：

***n*＝ ，0≤*ai*≤*i*，****

###### 证明 nC(n－1，r)＝（r＋1）C(n，r＋1)。并给出组合意义。

**意义：将n个人分为3组：一组1人，一组r人，另一组人。一种分法是先从*n*个人中选出*r*＋1人，剩下人为一组，再将所选的*r*＋1人分为两组，一组1人，一组r人。另一种分法是先选一人为一组，再从其余的人中选人为一组，剩下的人为一组。**

###### 证明 ＝n2n－1。

**（证）用殊途同归法。将n个不同的球放入标号为A、B、C的3个盒子，其中要求A盒只放1个球，其余两盒的球数不限。那么，有两种思路：**

1. **先从此n个不同的球中选出1个，放入A盒，再将其余个球放入另外两盒，有种放法；**
2. **先由n个球中选出k个，再从所选的k个球中选出1个放入A盒，将其余的k－1个球放入B盒，所剩的n－k个球放入C盒，有种放法。当，各种情况互不重复，且包含了所有放法，故对k求和，即得等式左端。**

###### 有n个不同的整数，从中取出两组来，要求第一组数里的最小数大于第二组的最大数，问有多少种方案？

**解 设取的第一组数有a个，第二组有b个，而要求第一组数中最小数大于第二组中最大的，即只要从n个数中取出m＝a＋b个数，从大到小排序后取前a个作为第一组，剩余的为第二组，就满足题目的要求。此时从n个数中取m个的方案数为*C*(*n*，*m*)。从m个数中取第一组数共有m－1种取法。故总的方案数为**

**＝**

###### 六个引擎分列两排，要求引擎的点火次序两排交错开来，试求从某一特定引擎开始点火有多少种方案？

**（解）设两排引擎分别为a,b,c 和x,y,z。**

**（1）设特定的引擎是a，则点火的方案数为3×2×2×1×1＝12。**

**（2）如果只指定从a,b,c这一排先开始点火，不指定某一个，则方案数为**

**3×3×2×2×1×1＝36**

**（3）如果第一个引擎任意选，只要求点火过程是交错的，则方案数为**

**6×3×2×2×1×1＝72**

###### 试求从1到1000000的整数中，0出现了多少次？

**（解）先不考虑1 000 000本身，那么任一个000 000～999 999之间的数都可以表示成如下形式**

****

**其中每个是0到9的数字。因为每位数字可以有10种选择，根据乘法法则，共有个“6位数”，又每个“6位数”由6个数字组成（包括无效0），那么共有个数字，又每个数字出现的概率相等， 所以0出现的次数应是**

**÷10＝**

**但习惯上在计算0的个数时，不包括无效0（即高位的0），因而要从中去掉无效0，其中**

**1位数有9个（不包括0），其无效0共有个；**

**2位数有90个，其无效0共个。**

**余类推，这样，无效0的总数为**

****

**注意到全0时的6个0和1 000 000本身的6个0相互抵消，所以1到1 000 000之间的自然数中0出现的次数为**

**＝488 895**

**注 1出现的次数为（要考虑1 000 000这个数的首位1），2，3，…，9各自出现的次数为。**

###### n个男n个女排成一男女相间的队伍，试问有多少种不同的方案？若围成一圆桌坐下，又有多少种不同的方案？

**答 （1）2； （2）n!(n－1)!**

###### n个完全一样的球，放到r个有标志的盒子，n≥r，要求无一空盒，试证其方案数为 。

**（证） 因为盒子不能空，所以每个盒子可先放一个球。然后把剩下的个球任意地放到r个盒子中，因为此时每盒的球数不限，这相当于求**

****

**的组合，其组合数为**

****

###### 设n＝，、、…、是k个不同的素数，试求能整除尽数n的正整数数目。

**答 **

###### 试求n个完全一样的骰子能掷出多少种不同的方案？

**（解）问题等价于计算从6类相异元素集中可重复地选取n个元素的n－重组合数，故方案数为**

****

###### 凸十边形的任意三个对角线不共点，试求这凸十边形的对角线交于多少个点？又把所有的对角线分割成多少段？

**（解）（1）先求交点数：因为一个交点需要两条对角线相交，而两条对角线又需要多边形的四个点构成一四边形。反之，从n个顶点中任取四个顶点，连诚意四边形，而四边形的两条对角线必须确定唯一的一个交点，故凸十边形的对角线共交于C(n,4)个点（前提：任三对角线不共点，否则，一个交点不能对应n边形的唯一四个顶点）**

**（2）2交点总数＋对角线条数＝**

###### 试证一整数n是另一个整数的平方的充要条件是除尽n的正整数的数目为奇数。

**（证）设n的标准分解式为n＝，其中诸是互相不同的素数，为正整数。那么**

**n是一个完全平方数  都是偶数  ＋1都是奇数 ＝奇数，即n的正因子数，亦即除尽n的正整数有奇数个。**

###### 统计力学需要计算r个质点放到n个盒子里去，并分别服从下列假定之一，问有多少种不同的图象。假设盒子始终是不同的，

**（1）*Maxwell*－*Boltzmann*假定：*r*个质点是不同的，任何盒子可以放任意个。**

**（2）*Bose*－*Einstein*假定：*r*个质点完全相同，每一个盒子可以放任意个。**

***（3）Fermi*—*Dirac*假定：*r*个质点都完全相同，每盒不得超过一个。**

**（解）（1）是重复排列问题，共有种不同图象；**

**（2）是重复组合问题，共有种不同图象；**

**（3）是不重复组合问题，共有种不同图象。**

###### 从26个英文字母中取出6个字母组成一字，若其中有2或3个母音，问分别可构成多少个字（不允许重复）？

###### 给出

****

**的组合意义。**

###### 给出

****

**的组合意义。**

###### 证明：

****

###### 对于给定的正整数n，证明在所有C(n，r)（r＝1,2, …,n）中，当

**k＝**

**时，C(n，k)是最大值。**

**（a）用组合方法证明和都是整数。**

**（b）证明是整数。**

**（证）（a）方法一：把2n个不同的球放入n个相异的盒子中，每个盒子中恰有2个球，其分配方案数即为＝。**

**方法二：因为，所以**

****

**是多项式中项的系数。**

**方法三： 集合中2n个元素的全排列的总数即为**

****

**其次，对，方法类似，关键是看出＝。**

**（b）仿（a），把kn个不同的球放入n个相异的盒子中，每个盒子中恰有k个球，其分配方案数即为＝，但若盒子相同，则分配方案数即为，再令k＝n，即得结果。**

**（a）在2*n*个球中，有*n*个相同。求从这2*n*个球中选取*n*个的方案数。**

**（b）在3*n*＋1个球中，有*n*个相同。求从这3*n*＋1个球中选取*n*个的方案数。**

**（解）（a）视为从集合中选取n个元素，分类统计，共有n＋1类取法：设第k类取法是指所取的n个元素中含有k个，个其它的（每个最多取一次），则此类取法共有种。所以，总的方案数为**

****

**（b）与（a）类似，方案数＝＝**

###### 证明在由字母表{0，1，2}生成的长度为n的字符串中。

**(a) 0出现偶数次的字符串有个；**

**(b) 其中q＝2.**

**（证）（a）为了叙述方便，称满足条件的串为偶串，否则为奇串。并设满足条件的串为 。考虑诸中至少有一个为0或1的串，那么，从串的左边开始向右扫描，总是会碰到0或1，对扫描到的第一个0（或1），将其改为1（或0），从而将偶串变成了唯一的一个奇串，或将奇串变成了唯一的一个偶串。因此，在三进制串中，除了每一位都是2的偶串（22…2）之外，所有偶串与奇串一一对应，故各有个，再加上全2的串，偶串的总数应为**

**＝**

**（b）设偶串中有2k个0，则。可由两步来构造这样的n位串：**

* 1. **先在n个不同的位置放入2k个相同的0，有种放法；**
  2. **再在其余的个位置放入1或2，其放法对应位二进制串的个数，有个。**

**所以，由乘法法则知有2k个0的偶串共有个。又知对于不同的k，相应的串之间没有重复。故由加法法则，全部偶串共有**

**，**

**个。再结合（a），即得欲证的结论。**

###### 5台教学仪器供m个学生使用，要求使用第1台和第2台的人数相等，有多少种分配方案？

**（解）由题目要求知5台仪器被视为是不同的。将分配过程分为三步：**

**（1）从*m*个学生中选出2k人，有种选法；**

**（2）将选出的2k个学生分给1、2号仪器，且每台仪器k个人，有种分法；**

**（3）将其余的名学生分给3、4、5号仪器，每台仪器所分人数不限，有种分法。**

**由加法法则，总的分配方案数为**

****

**其中t＝。**

###### 由n个0及n个1组成的字符串，其任意前k个字符中，0的个数不少于1的个数的字符串有多少？

**答 见教材第3章（P.73）**

**解** 由n个1和n个0组成的2*n*位二进制数共有个(2*n*个不尽相异元素的全排列)，设所求的二进制数共有个，不符合要求的数有个。而不合要求的数的特征是从左向右扫描时，必然在某一位首次出现0的个数大于1的个数，即从左向右累计到第2*k*＋1位时出现*k*＋1个0和*k*个1。此时，后2(*n*－*k*)－1位上有*n*－*k*个1，*n*－*k*－1个0。将后部分的0改写为1，1改写为0。结果整个数变成由*n*－1个1和*n*＋1个0组成的2*n*位数*z*。即一个不合要求的数唯一对应于这样的一个数*z*。

10000111  11111000， 00011110  00011111

01010110  01010111， 00111001  00111110

反之，给定一个由*n*－1个1和*n*＋1个0组成的2*n*位数*z*．由于0比1多2个，故一定在某一位首次出现0的累计数超过1的累计数。依同法将此位后的0与1互换，使*z*变成由*n*个1和*n*个0组成的2*n*位数。所以，这两种二进制数一一对应。即



故

＝